UC 413

SESSION 2004

---

# Filière MP

# MATHÉMATIQUES

---

Épreuve commune aux ENS de Paris et Cachan

---

Durée : 4 heures

---

*L'usage de calculatrices électroniques de poche à alimentation autonome, non imprimantes et sans document d'accompagnement, est autorisé. Cependant, une seule calculatrice à la fois est admise sur la table ou le poste de travail, et aucun échange n'est autorisé entre les candidats.*

**Tournez la page S.V.P.**

L'objectif de ce problème est d'étudier les propriétés de quelques espaces de fonctions périodiques et de quelques transformations opérant entre ces espaces. Dans tout l'énoncé, $C^0_{per}$ désigne l'ensemble des fonctions continues périodiques sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{C}$, de période $2\pi$, et plus généralement pour tout $s \in \mathbb{N}$, $C^s_{per}$ est l'ensemble des fonctions $s$ fois continument dérivables, périodiques de période $2\pi$. Enfin $C^\infty_{per}$ est l'ensemble des fonctions infiniment dérivables.

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on définit sur $\mathbb{R}$ la fonction $e_n$ par $e_n(x) = e^{inx}$. Pour une fonction $\phi \in C^0_{per}$, on définit pour tout $n \in \mathbb{Z}$, son $n$-ième coefficient de Fourier par

$$c_n(\phi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \phi(x) e_n(-x) dx.$$

On rappelle que pour de telles fonctions,

$$\int_0^{2\pi} |\phi(x)|^2 dx = 2\pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(\phi)|^2.$$

On utilisera également les deux résultats suivants:

*Résultat 1:* Soit $f(n,m)$ une application de $\mathbb{Z}^2$ vers $\mathbb{C}$. Soit

$$a_n = \sum_{m\in\mathbb{Z}} |f(n,m)|.$$

Si $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n$ converge alors

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}} \Big( \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n,m) \Big) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \Big( \sum_{m\in\mathbb{Z}} f(n,m) \Big).$$

*Résultat 2:* Soit $f(x,n)$ une application continue par morceaux de $[0,2\pi]\times\mathbb{Z}$ vers $\mathbb{C}$. On suppose que la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(\cdot,n)$ converge simplement sur $[0,2\pi]$ vers une fonction continue par morceaux notée $f$. On suppose que la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} |f(x,n)|\, dx$ converge. Alors,

$$\int_0^{2\pi} f(x)\, dx = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} f(x,n)\, dx.$$



**Tournez la page S.V.P.**

Introduisons maintenant quelques notations. Pour $\phi \in C^0_{per}$ et pour $p \in [1, +\infty[$, on note

$$N_p(\phi) = \Big( \int_0^{2\pi} |\phi(x)|^p dx \Big)^{1/p}.$$

On note de plus

$$N_\infty(\phi) = \sup_{0 \leq x \leq 2\pi} |\phi(x)|.$$

Pour $s \in \mathbb{R}$ et pour $\phi \in C^0_{per}$, on définit $\|\phi\|_s$ par

$$\|\phi\|_s = \sqrt{\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(\phi)|^2 (1+n^2)^s}$$

si cette série converge et par $\|\phi\|_s = +\infty$ sinon. Enfin, on pose:

$$H^s = \{\phi \in C^0_{per} \quad | \quad \|\phi\|_s < +\infty\}.$$

# Partie I.

Cette partie est consacrée à l'étude des premières propriétés des fonctions $N_p$ et des ensembles $H^s$.

1) Montrer qu'il existe une constante $C_\infty$ telle que:

$$\forall \phi \in C^0_{per}, \quad N_2(\phi) \leq C_\infty N_\infty(\phi).$$

2) Montrer que

$$\forall \phi \in C^0_{per}, \quad N_4(\phi) \leq N_2(\phi)^{1/2} N_\infty(\phi)^{1/2}.$$

3) Soit $s > 1/2$. Montrer qu'il existe une constante $C(s)$ telle que

$$\forall \phi \in C^1_{per}, \quad N_\infty(\phi) \leq C(s) \|\phi\|_{H^s}.$$

4) Soit $\phi(x)$ la fonction périodique de période $2\pi$ qui vaut $\pi - |x|$ pour $-\pi < x < \pi$. Calculer $c_n(\phi)$. Pour quelles valeurs de $p$ a t on $\phi \in C^p_{per}$ ? Pour quelles valeurs de $s$ a t on $\phi \in H^s$ ?

5) Montrer qu'il n'existe pas de constante $C$ telle que

$$\forall \phi \in C^0_{per}, \quad N_\infty(\phi) \leq C N_2(\phi).$$

6) Montrer que si $\phi \in C^1_{per}$, alors $\phi \in H^1$.

7) Donner un exemple de fonction $\phi \in C^0_{per}$, telle que $\|\phi\|_1 < +\infty$ mais qui ne soit pas $C^1_{per}$.

8) On fixe $s$ un réel positif.

   8.1) Montrer que $C^\infty_{per} \subset H^s$ et que $||\cdot||_s$ définit une norme sur l'espace vectoriel $C^\infty_{per}$.

   8.2) Montrer que $||\cdot||_s$ est une norme associée à un produit hermitien $<\cdot,\cdot>_s$ sur $C^\infty_{per}$ que l'on précisera.

   8.3) Trouver une famille $(g_n; n \in \mathbb{Z})$ d'éléments de $C^\infty_{per}$ orthonormée pour $<\cdot,\cdot>_s$ et telle que $\mathrm{Vect}(g_n; n \in \mathbb{Z})$ est dense dans $C^\infty_{per}$ pour $||\cdot||_s$.

   8.4) Soit $p \in \mathbb{Z}$. On définit pour tout $\phi \in C^\infty_{per}$ l'application $M_p(\phi) = e_p\phi$. Montrer que $M_p$ est un endomorphisme continu de $(C^\infty_{per}, ||\cdot||_s)$ et montrer que pour $p \neq \pm 1$,

$$\sup\{||M_p(\phi)||_s \ , \ \phi \in C^\infty_{per} \ : \ ||\phi||_s = 1\} = (1+p^2)^{s/2}.$$

   Calculer la valeur de ce supremum pour $p = \pm 1$.

## Partie II

Une fonction de deux variables $a(x,\xi)$, de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ vers $\mathbb{C}$, périodique de période $2\pi$ en la première variable $x$, est appelée symbole d'ordre $m$ pour $m$ dans $\mathbb{Z}$ s'il existe une constante $A$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $\xi \in \mathbb{Z}$,

$$|a(x,\xi)| \leq A(1+|\xi|)^m$$

et si de plus pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$, il existe une constante $A_{\alpha,\beta}$ telle que

$$|\partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha a(x,\xi)| \leq A_{\alpha,\beta}(1+|\xi|)^{m-\alpha}.$$

Soit $a$ un symbole d'ordre $m$. On définit pour tout $\phi \in C^\infty_{per}$ la fonction $T_a\phi$ par

$$(T_a\phi)(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a(x,n)c_n(\phi)e_n(x).$$

L'objectif de cette partie est d'étudier les propriétés de $T_a$.

1.1) Vérifier que $T_a$ est un endomorphisme de $C^\infty_{per}$.



**Tournez la page S.V.P.**

1.2) Dans cette question on suppose que $\phi$ est seulement $C^p_{per}$. Montrer que si $p$ est assez grand par rapport à $m$, alors $T_a\phi$ est correctement définie et est dans $C^0_{per}$.

2) On suppose que $a(x,\xi) = \alpha(x)$ ne dépend pas de la seconde variable et est une fonction $C^\infty$, $2\pi$-périodique. Vérifier que $a$ est un symbole d'ordre 0. Calculer $T_a\phi$.

3) Vérifier que $a(x,\xi) = i\xi$ (avec $i^2 = -1$) est un symbole d'ordre 1. Pour $\phi \in C^\infty_{per}$, calculer $T_{i\xi}\phi$. Calculer de même $T_{\xi^2}\phi$.

4) Dans cette question $m = 0$.

4.1) Soit pour $p \in \mathbb{Z}$

$$\hat{a}(p,\xi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} a(x,\xi)e_p(-x)\,dx.$$

Montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}$ il existe une constante $A_N \in \mathbb{R}$ telle que

$$|\hat{a}(p,\xi)| \leq \frac{A_N}{(1+|p|)^N}$$

pour tout $p$ et tout $\xi$.

4.2) Pour tout $p \in \mathbb{Z}$, on définit sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ la fonction $f_p(x,\xi) = \hat{a}(p,\xi)$, qui ne dépend donc pas de la première variable. Montrer que pour tout $y \in \mathbb{R}$

$$T_a\phi(y) = \sum_{p\in\mathbb{Z}} e_p(y).(T_{f_p}\phi)(y)$$

4.3) Montrer qu'il existe une constante $C_0$, dépendant de $a$, telle que

$$\|T_a\phi\|_0 \leq C_0\|\phi\|_0\ ,\ \forall\phi \in C^\infty_{per}.$$

4.4) Soit $s$ un réel positif. Montrer qu'il existe une constante $C_s$, dépendant de $a$, telle que

$$\|T_a\phi\|_s \leq C_s\|\phi\|_s\ ,\ \forall\phi \in C^\infty_{per}.$$

5) Dans cette question, $m$ désigne un entier strictement positif. Soit $b(\xi) = 1 + i\xi$. Exprimer très simplement $(T_b)^{-1}$ puis calculer $T_a(T_b)^{-m}$. En déduire que pour tout $s \geq 0$ il existe une constante $C_s$ telle que

$$\|T_a\phi\|_s \leq C_s\|\phi\|_{s+m}\ ,\ \forall\phi \in C^\infty_{per}.$$

6) Dans cette question, $m$ est un entier strictement négatif. Montrer que pour tout $s \geq 0$ il existe une constante $C$ telle que pour tout $\phi \in C^{\infty}_{per}$,

$$\|T_a\phi\|_s \leq C\|\phi\|_{s+m}.$$

## Partie III

Cette partie est consacrée à l'étude de la composée de deux endomorphismes $T_a$ et $T_b$ où $a$ un symbole d'ordre $m$ et $b$ un symbole d'ordre $m'$.

1) Montrer que $a(x,\xi)b(x,\xi)$ est un symbole. Quel est son ordre ?
2) On suppose dans cette question que $a$ ne dépend que de $x$ et que $b$ ne dépend que de $\xi$. Vérifier que

$$T_{ab} = T_a \circ T_b.$$

Comparer $T_{ab}$ et $T_b \circ T_a$ (donner des exemples).

3) Cette question est consacrée au calcul de $T_a \circ T_b$.

3.1) Montrer que $T_a(T_b\phi)(x)$ peut s'écrire sous la forme

$$T_a(T_b\phi)(x) = \frac{1}{2\pi}\sum_m \int_0^{2\pi} c(x,m)e^{im(x-z)}\phi(z)dz$$

où

$$c(x,m) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}} a(x,n+m)\hat{b}(n,m)e^{ixn}.$$

3.2) Dans le cas où $a$ est un polynôme en $\xi$ (les coefficients étant des fonctions périodiques de $x$), montrer que $T_c = T_a \circ T_b$ où

$$c = \sum_{n\geq 0} \frac{(\partial_\xi^n a).(\partial_x^n b)}{i^n n!}.$$

## Applications

Cette partie est consacrée à l'utilisation des endomorphismes définis dans les parties précédentes pour résoudre des équations



**Tournez la page S.V.P.**

différentielles. Soient $f(x)$ et $g(x)$ deux fonctions $C^{\infty}_{per}$, et soit $\psi(x) \in C^{0}_{per}$. On cherche à résoudre l'équation suivante en $\phi$

$$-f(x)\phi''(x) + g(x)\phi(x) = \psi(x). \tag{1}$$

On suppose de plus que $f(x) > 0$ et $g(x) > 0$ pour tout $x$.

1) Montrer que (1) peut se réécrire

$$T_a\phi = \psi$$

et expliciter $a$. Quel est l'ordre du symbole $a$ ?

2) Vérifier que $a^{-1}$ est un symbole. Quel est son ordre ?
3) Trouver $\phi_1$ tel que $T_a\phi_1 - \psi \in H^1$.
4) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $\phi_n$ tel que $T_a\phi_n - \psi \in H^n$.